جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الثانية للعام الدراسي 2015 - 2016
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن اجتماع الزمرتين $4Z$ و $5Z$ يساوي الزمرة $20Z$.
(2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_3(18)$ من الزمرة $U(18)$ يساوي 6 عناصر.
(3) مرتبة العنصر (-1) في الزمرة $(Z, +)$ تساوي 2
(4) رتبة الزمرة الجزئية المولدة بالعنصر 8 من الزمرة $(Z_{12}, +)$ تساوي 4.
(5) إن مقلوب (نظير) العنصر 11 في زمرة أولر $U(18)$ هو 5
(6) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 12 فإن مرتبة العنصر a^4 في G تساوي 8
(7) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(7)$ يساوي 6 زمر جزئية.
(8) إن عدد عناصر زمرة الخارج $U(18)/U_3(18)$ يساوي 3.
(9) إذا كان $\varphi: Z_{30} \to Z_{30}$ تشاكلاً وكان $\operatorname{Ker}\varphi = \{0, 10, 20\}$ و $\varphi(23) = 6$ فإن $\varphi^{-1}(6) = 23 \cdot \ker\varphi$.
(10) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{30} إلى الزمرة Z_{10} يساوي 10.
(11) إن العنصر a^5 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 20.
(12) كل زمرة من المرتبة 49 ليست تبديلية لأن 49 ليس عدداً أولياً.
(13) رتبة العنصر (4, 2) من الزمرة $Z_{30} \oplus Z_{20}$ يساوي 60
(14) إن $Z_2 \oplus Z_2 \cong U(12)$.

السؤال الثاني (46 درجة): لتكن $(G, .)$ زمرة ما. أثبت صحة ما يلي:

(1) إذا كان $(ab)^2 = a^2b^2$ لكل $a, b \in G$ فإن G تكون تبديلية.
(2) إذا كان $a, b \in G$، فإن $o(a.b) = o(b.a)$ (حيث $o(a.b)$ يعني رتبة $(a.b)$).
(3) كل زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي هي زمرة دوارة.
(4) كل زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G هي نواة لهوموموفيزم زمرتي عنصر.
(5) إذا كان f تشاكلاً للزمرة $(Q^*, .)$ في نفسها حيث Q^* مجموعة الأعداد العادية (النسبية) المغايرة للصفر و (.) عملية الضرب العادي والمعرف بالشكل $f(x) = |x|$، أوجد $\ker f$.
(6) إذا كانت G منتهية و p- زمرة (p عدد أولي) فإن كلاً من $Z(G)$ و $G/Z(G)$ هي p- زمرة.

السؤال الثالث (12 درجة): لتكن G زمرة منتهية. اذكر نص مبرهنة سيلو الأولى وعرف الزمرة الجزئية السيلوفية في G، ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 35

2016 - 7 - 10

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

أسئلة
أم تصحيح مقرر البنى الجبرية /1/

سنة ثانية رياضيات

الدورة الثانية للعام 2015 - 2016

الجواب الأول [42 درجة] اثنان وأربعون — لكل بند 3 درجات

1) خطأ، لأنه يوجد اجتماع معرف لها حيث $4Z \not\subset 5Z$ و $5Z \not\subset 4Z$.

2) خطأ، تساوي 3 عناصر.

3) خطأ، لا نهائية.

4) خطأ تساوي 3

5) صح

6) خطأ، 4 زمر جزئية.

7) خطأ، تساوي 4.

8) خطأ، يساوي عشرين.

9) خطأ، $\varphi^{-1}(6) = 23 + Ker\varphi$

10 صح.

11) خطأ، لأن 5 و 20 ليسا أوليان فيما بينهما.

12) خطأ تبديلية لأنه مرتبط من الشكل $(7)^2$ (7 عدد أولي).

13) خطأ، 15.

14) صح

الجواب الثاني 46 درجة

1) بما أن $(ab)^2 = a^2b^2$ يكون بعد تطبيق قانوني الاختصار (5)

$(ab)(ab) = aabb \Rightarrow ba = ab$ لكل $a,b \in G$

2) لنفرض أن $o(ab)=n$ حيث $n \in Z^+$ ولنبرهن أن $o(ba)=n$. (5)

$(ab)^n = (ab)(ab)\cdots(ab) = e \Rightarrow a(ba)(ba)\cdots(ba)b = e$

$\Rightarrow (ba)(ba)\cdots(ba) = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} \Rightarrow$ بالضرب بـ (ba) نجد

($n-1$ مرة)

$(ba)^n = (ba)(ba)\cdots(ba) = (ba)^{-1}(ba) = e \Rightarrow o(ba) = n.$

(n مرة)

3) لنفرض مرتبة $G = P$ عندئذ $G \neq \langle e \rangle$ ومنه يوجد $e \neq a \in G$ لنأخذ $\langle a \rangle$، بالتعريف $\langle a \rangle \neq \langle e \rangle$ فإن $G = \langle a \rangle$. لأنه بالحالة المعاكسة وحسب لاغرانج تكون مرتبة $\langle a \rangle$ تقسم مرتبة G وهذا غير ممكن لأن P أولي ومنه $G = \langle a \rangle$ وبالتالي G دوارة.

4) لتكن H زمرة جزئية ناظمية في G ولنأخذ العلاقة $\pi : G \to G/H$ والمعرفة على النحو: $\pi(g) = gH, \ \forall g \in G$

$\forall a,b \in G : \pi(ab) = (ab)H = (aH)(bH) = \pi(a)\pi(b)$ — π تشاكل

π غامر: $\forall gH \in G/H$ فإن $g \in G$ و $\pi(g) = gH$

ويلاحظ أن $\ker \pi = H$

5) $f : Q^* \to Q^*$ المعرف على النحو: $f(x) = |x|, \ \forall x \in Q^*$

$\ker f = \{x \in Q^* : f(x) = |x| = 1\} \Rightarrow \ker f = \{-1, +1\}.$

6) بما أن $Z(G)$ زمرة جزئية في G فأي زمرة جزئية من زمرة P-زمرة هي P-زمرة (P أولي) ومنه $Z(G)$ P-زمرة وبما أن $Z(G)$ ناظمية في G فإن $G/Z(G)$ P-زمرة.

الجواب الثالث:

$(G:1) = 35 = 5 \times 7$ عندئذ G تحوي 5-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5 وأيضاً تحوي 7-زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 7 على الأكثر. إن عدد جميع الـ5-زمر جزئية سيلوفية ومرتبة كل منها 5 يعطى بالعلاقة $1+K5$ ويجب أن يقسم 35 ونجد لأجل $K \neq 0$ فإن $1+K5$ و $1+K7$ لا يقسم 35 ومنه توجد 5-زمرة جزئية سيلوفية واحدة وهي ناظمية ودوارة ولتكن H و 7-زمرة جزئية سيلوفية واحدة وهي ناظمية ودوارة ولتكن K ومنه $G = KH$.

مدرس المادة: [illegible] تاريخ الامتحان: 2016/7/10 د. إيمان [illegible]